INRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 199

SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS DANS UNE FABRICATION EN LIGNE

Première Partie

Pierre COILLARD
Jean-Marie PROTH

Avril 1983

SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS DANS UNE FABRICATION EN LIGNE

Pierre COILLARD* et Jean-Marie PROTH**

Première Partie

RESUME

Ce papier est consacré à l'étude d'un système de deux machines fonctionnant en ligne et séparées par un stock tampon. Chaque machine est susceptible de tomber en panne. Nous donnons le taux de production en fonction du niveau maximal du stock tampon. Une application est proposée. Les logiciels sont fournis.

ABSTRACT

This paper is devoted to a system composed of two machines through which material must pass. Each machine is subject to failure and a storage buffer is located between these machines. We give the production rate in term of the maximal level of the storage buffer. We give an example and the software.

* Houillères du Bassin de Lorraine, Service Informatique,
57800 - FREYMING-MERLEBACH, FRANCE.

** INRIA, B.P. 105, 78150 LE CHESNAY, FRANCE.

Nous nous intéressons à l'effet des stocks tampons sur le taux de production d'un ensemble de machines travaillant en ligne. Nous savons que le taux de production est une fonction non décroissante du maximum d'un stock tampon quelconque. Nous analysons ce phénomène dans les pages qui suivent.

Les machines considérées sont susceptibles de tomber en panne. La suite des états d'une machine donnée obéit à un processus de Markov lorsque cette machine évolue librement. Cette hypothèse peut sembler restrictive. En fait, l'expérience montre qu'elle fournit un modèle satisfaisant.

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème et, en particulier, [1], [2], [3], [4] et [5] (voir en fin de seconde partie). Le lecteur observera, cependant, que les solutions analytiques complètes n'ont jamais été proposées sous les hypothèses que nous faisons ici. En outre et à notre connaissance, le cas de trois machines identiques fonctionnant en continu n'a jamais été abordé analytiquement.

Le volume des résultats exige une présentation en deux parties.

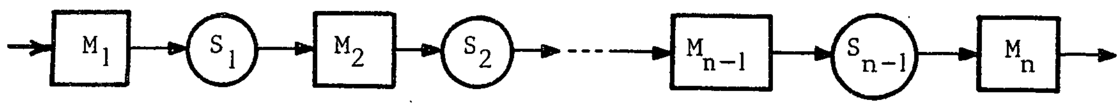
La première s'attache au cas de deux machines, séparées par un stock tampon. Les solutions analytiques sont fournies dans tous les cas ainsi que quelques exemples numériques et une application.

La seconde s'intéresse au cas de trois machines identiques. Là-encore, la solution analytique est donnée. La longueur des calculs montre, cependant, que la résolution du problème à quatre machines ou plus, si elle est théoriquement possible, n'est pas raisonnablement envisageable.

Nous donnerons, en conclusion, quelques suggestions pour une approche simplifiée du phénomène.

A - PROBLEME ET NOTATIONS

Nous nous intéressons à l'effet des bornes supérieures des stocks tampons séparant un ensemble de machines fonctionnant en série (voir figure 1).



M_i, $i=1,\ldots,n$: machines
S_i, $i=1,\ldots,n-1$: stocks tampons

Figure 1

Lorsqu'une machine M_i $(i=1,2,\ldots,n)$ fonctionne à l'instant t, la probabilité pour qu'elle tombe en panne sur $[t,t+dt]$ est égale à $p_i\,dt$.

De même, lorsque M_i est en panne à l'instant t, la probabilité qu'elle soit réparée sur l'intervalle de temps $[t,t+dt]$ est $r_i\,dt$.

Notons que nos hypothèses simplifient considérablement le problème : les probabilités de passage d'un état à un autre ne dépendent que de l'état observé (processus markovien). Cette hypothèse, évidemment peu réaliste, a cependant le mérite de permettre l'obtention de résultats analytique qui reflètent, en moyenne, le phénomène étudié.

Dans la suite, c_i $(i=1,2,\ldots,n)$ représente le débit de la machine M_i, c'est-à-dire sa production par unité de temps.

Nous supposerons que ce débit n'est pas réglable. Nous ferons, cependant, une exception dans deux cas particuliers dont nous reparlerons plus loin.

La borne supérieure du stock tampon qui sépare les machines M_i et M_{i+1} pour $i=1,2,\ldots,n-1$ est notée h_i $(h_i \geq 0)$ et la borne inférieure est 0.

Nous supposons que la matière première qui alimente M_1 est toujours disponible et que les besoins en produits finis sont illimités.

Notons que la matière transformée est supposée continue.

Enfin, la probabilité d'observer plus d'un changement d'état sur l'ensemble des machines durant une période élémentaire [t,t+dt] est un infiniment petit d'ordre 2 en dt et nous la négligerons.

Nous rappelons d'abord les résultats détaillés dans le cas de deux machines différentes, séparées par un stock tampon. Nous donnerons une application de ce résultat pour la détermination de la position d'un stock tampon unique dans une fabrication de type "flow shop". Puis, nous développerons l'étude de trois machines identiques, travaillant en ligne et séparées par deux stocks tampons.

B- CAS DE DEUX MACHINES

Les probabilités de passage sont alors données par le tableau suivant :

Etat à l'instant t \ Etat à l'instant t+dt	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	$1-(r_1+r_2)dt$	$r_2\ dt$	$r_1\ dt$	0
(0,1)	$p_2\ dt$	$1-(r_1+p_2)dt$	0	$r_1\ dt$
(1,0)	$p_1\ dt$	0	$1-(p_1+r_2)dt$	$r_2\ dt$
(1,1)	0	$p_1\ dt$	$p_2\ dt$	$1-(p_1+p_2)dt$

Tableau 1

Nous désignons par $F_{ij}(x,t)$ la probabilité que le niveau du stock tampon appartienne à $]0,x]$ et que l'état du système soit (i,j) à l'instant t (avec $x \in]0,h_1[$).

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent :

$$F_{00}[x,t+dt] = \{1-(r_1+r_2)dt\}\{F_{00}[x,t]\}+p_1F_{10}[x,t]dt+p_2F_{01}[x,t]dt$$

$$F_{01}[x,t+dt] = \{1-(r_1+p_2)dt\}\{F_{01}[x+c_2dt,t]-F_{01}[c_2dt,t]\} + p_1F_{11}[x,t]dt+r_2F_{00}[x,t]dt$$

$$F_{10}[x,t+dt] = \{1-(p_1+r_2)dt\}\{F_{10}[x-c_1dt,t]+F_{10}[c_1dt,t]\} + p_2F_{11}[x,t]dt+r_1F_{00}[x,t]dt$$

$$F_{11}[x,t+dt] = \{1-(p_1+p_2)dt\}\{F_{11}[x+(c_2-c_1)dt,t] - \frac{c_2-c_1}{|c_2-c_1|} F_{11}[|c_2-c_1|dt,t]\}+r_1F_{01}[x,t]dt+r_2F_{10}[x,t]dt$$

Ces relations nous conduisent aux équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial F_{00}}{\partial t}[x,t] = -(r_1+r_2)F_{00}[x,t]+p_1F_{10}[x,t]+p_2F_{01}[x,t]$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial t}[x,t] = -(r_1+p_2)F_{01}[x,t]+p_1F_{11}[x,t]+r_2F_{00}[x,t] + c_2\{\frac{\partial F_{01}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{01}}{\partial x}[0^+,t]\}$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x}[x,t] = -(p_1+r_2)F_{10}[x,t]+r_1F_{00}[x,t]+p_2F_{11}[x,t] - c_1\{\frac{\partial F_{10}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{01}}{\partial x}[0^+,t]\}$$

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x}[x,t] = -(p_1+p_2)F_{11}[x,t]+r_1F_{01}[x,t]+r_2F_{10}[x,t] + (c_2-c_1)\{\frac{\partial F_{11}}{\partial x}[x,t] - \frac{\partial F_{11}}{\partial x}[0^+,t]\}$$

Nous supposons que notre système admet un régime permanent et nous nous intéressons uniquement à ce type de fonctionnement.

Alors, les relations ci-dessus deviennent (en remplaçant systématiquement $F_{ij}[x,t]$ par $F_{ij}[x]$ car ces fonctions ne dépendent plus du temps) :

$$[r_1+r_2]F_{00}(x)-p_1F_{10}(x)-p_2F_{01}(x) = 0 \tag{1.1}$$

$$[r_1+p_2]F_{01}(x)-p_1F_{11}(x)-r_2F_{00}(x) = c_2\left[\frac{dF_{01}}{dx}(x)-\frac{dF_{01}}{dx}(0^+)\right] \tag{1.2}$$

$$[p_1+r_2]F_{10}(x)-r_1F_{00}(x)-p_2F_{11}(x) = -c_1\left[\frac{dF_{10}}{dx}(x)-\frac{dF_{10}}{dx}(0^+)\right] \tag{1.3}$$

$$[p_1+p_2]F_{11}(x)-r_1F_{01}(x)-r_2F_{10}(x) = [c_2-c_1]\left[\frac{dF_{11}}{dx}(x)-\frac{dF_{11}}{dx}(0^+)\right] \tag{1.4}$$

Les fonctions de répartition cherchées sont solutions de ce système différentiel. Les solutions sont ensuite utilisées pour formuler les probabilités aux bornes du stock tampon. Enfin, des conditions permettront de fixer les constantes d'intégration. Pour simplifier l'exposé, nous traiterons d'abord le cas où c_1, c_2, p_1, p_2, r_1 et r_2 sont tous différents de zéro : ce sera le cas général. Nous envisagerons ensuite tous les cas particuliers.

1. - CAS GENERAL : PARAMETRES TOUS NON NULS

1.1. - Etude des fonctions de répartition

La présence de c_2-c_1 dans (1.4), nous conduit à envisager deux cas :

1.1.1. - $c_1 \neq c_2$

En remarquant que $F_{00}(0^+)=F_{01}(0^+)=F_{10}(0^+)=F_{11}(0^+)=0$, les relations (1.1) à (1.4) conduisent à :

$$F_{00}(x) = (p_1F_{10}(x) + p_2F_{01}(x))/(r_1+r_2) \tag{2.1}$$

$$F_{11}(x) = (c_1F_{10}(x) - c_2F_{01}(x))/(c_2-c_1) \tag{2.2}$$

$$\frac{dF_{10}}{dx}(x) = AF_{10}(x) + BF_{01}(x) + \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \tag{2.3}$$

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = EF_{10}(x) + DF_{01}(x) + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \tag{2.4}$$

avec :

$$A = \frac{p_2}{c_2-c_1} - \frac{r_2(r_1+r_2+p_1)}{c_1(r_1+r_2)} \qquad B = \frac{p_2}{c_1}\left[\frac{r_1}{r_1+r_2} - \frac{c_2}{c_2-c_1}\right]$$

$$E = -\frac{p_1}{c_2}\left[\frac{r_2}{r_1+r_2} + \frac{c_1}{c_2-c_1}\right] \qquad D = \frac{p_1}{c_2-c_1} + \frac{r_1(r_1+r_2+p_2)}{c_2(r_1+r_2)}$$

Le système différentiel "sans second membre" déduit de (2.3) et (2.4) conduit à rechercher les valeurs propres de la matrice :

$$[M] = \begin{bmatrix} A & B \\ E & D \end{bmatrix}$$

qui sont racines de :

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + AD - EB = 0 \tag{3}$$

Pour cela, nous avons à considérer :

$$\Delta = (A+D)^2 - 4(AD-EB) = (A-D)^2 + 4\ EB$$

Un calcul simple montre que :

$$EB = \frac{(c_2r_2 + c_1r_1)^2\ p_1p_2}{c_1c_2(c_2-c_1)^2(r_1+r_2)^2} \geq 0$$

si bien que Δ est toujours positif ou nul et (3) admet toujours des racines réelles.

De plus :

$$AD-EB = \frac{[r_1+r_2+p_1+p_2][c_1 r_1 (r_2+p_2)-c_2 r_2 (r_1+p_1)]}{c_1 c_2 (c_2-c_1)\ (r_1+r_2)} \tag{4}$$

s'annule pour :

$$c_1 \frac{r_1}{r_1+p_1} = c_2 \frac{r_2}{r_2+p_2}$$

Cette relation exprime que les taux de production des deux machines sont égaux. D'où les deux cas que nous introduisons maintenant.

1.1.1.1. - Les deux machines ont même taux de production

Alors (3) a une racine nulle et nous sommes conduits à la solution générale :

$$F_{01}(x) = K\ \{\exp\ [(A+D)x]-1\}\ -\ S\ \frac{E}{A+D}\ x \tag{5.1}$$

$$F_{10}(x) = \frac{B}{D} K\ \{\exp[(A+D)x]-1\}\ +\ S\ \frac{D}{A+D}\ x \tag{5.2}$$

où $K \in \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

Ces relations ont été établies en tenant compte du fait que les machines ont même taux de production. Nous verrons plus loin comment déterminer K et S. Il est facile de montrer que $D \neq 0$ lorsque les taux de production sont égaux. D'autre part, nous pouvons montrer que $A+D \neq 0$ sous nos hypothèses. Les relations (5.1) et (5.2) sont à compléter par (2.1) et (2.2).

1.1.1.2. - Les deux machines ont des taux de production différents

Des calculs simples montrent que, pour que (3) ait une racine double, il faut que :

$p_2 = 0$ lorsque $c_1 > c_2$

et $p_1 = 0$ lorsque $c_2 > c_1$

Ces éventualités sont comprises dans l'étude des cas particuliers que nous présentons plus loin.

Nous nous limitons au cas où l'équation caractéristique n'admet pas de racine double.

Nous désignons les racines de cette équation par k_1 et k_2 et nous supposons que $k_2 > k_1$.

La solution du système constitué par (2.3) et (2.4) est obtenue de manière classique. Les calculs sont laissés aux soins du lecteur qui obtiendra :

$$F_{10}(x) = K\,[\exp(k_1x)-1] + S\,[\exp(k_2x)-1] \qquad (6.1)$$

et :

$$F_{01}(x) = \frac{k_1-A}{B}\,K[\exp(k_1x)-1] + \frac{k_2-A}{B}\,S[\exp(k_2x)-1] \qquad (6.2)$$

avec $K \in \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

Nous verrons plus loin comment lever l'indétermination sur S et K.

1.1.2. - $\underline{c_1 = c_2 = c}$

La relation (2.1) reste vraie et (1.4) se réécrit :

$$F_{11}(x) = \frac{1}{p_1+p_2}\,[r_1F_{01}(x) + r_2F_{10}(x)] \qquad (7.1)$$

En utilisant (2.1) et (7.1), les relations (1.2) et (1.3) nous conduisent à :

$$\frac{dF_{10}}{dx}(x) - \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) = \frac{dF_{01}}{dx}(x) - \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

$$= \frac{p_1+p_2+r_1+r_2}{c(r_1+r_2)(p_1+p_2)}\,[-r_2p_1F_{10}(x)+r_1p_2F_{01}(x)] \qquad (7.2)$$

Les deux premiers membres de cette relation donnent :

$$F_{10}(x) = F_{01}(x) + S\,x, \quad S \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

et nous obtenons, en considérant les deux derniers membres de (7.2) :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = U(r_1p_2 - r_2p_1)F_{01}(x) - S\,U\,r_2p_1\,x + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \tag{8.2}$$

avec :

$$U = \frac{p_1 + p_2 + r_1 + r_2}{c(r_1+r_2)\ (p_1+p_2)}$$

Deux cas sont alors à envisager :

1.1.2.1. - $\underline{r_1p_2 - r_2p_1 \neq 0}$

Nous sommes dans le cas où les deux machines ont des taux de production différents.

La solution de (8.2) s'écrit alors :

$$F_{01}(x) = K\,\{\exp[U(r_1p_2-r_2p_1)x] - 1\} + S\,\frac{r_2p_1}{r_1p_2-r_2p_1}\,x \tag{9.1}$$

et (8.1) conduit à :

$$F_{10}(x) = K\,\{\exp[U(r_1p_2-r_2p_1)x] - 1\} + S\,\frac{r_1p_2}{r_1p_2-r_2p_1}\,x \tag{9.2}$$

avec :

$K \in \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$

et :

$$U = \frac{p_1 + p_2 + r_1 + r_2}{c(r_1+r_2)\ (p_1+p_2)} \tag{9.3}$$

Bien entendu, la relation (2.1) reste vraie, de même que (7.1).

1.1.2.2. - $r_1p_2 - r_2p_1 = 0$

Nous sommes alors dans le cas où les débits et les taux de production des machines sont identiques.

Dans ce cas, (8.2) se réduit à :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(x) = - S\ U\ r_2p_1\ x + \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

et :

$$F_{01}(x) = - \frac{1}{2} S\ U\ r_2\ p_1\ x^2 + K\ x \qquad (9.4)$$

et, compte tenu de (8.1) :

$$F_{10}(x) = - \frac{1}{2} S\ U\ r_2p_1\ x^2 + (K+S)x \qquad (9.5)$$

où U est donné par (9.3), $K \in \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (7.1).

Les fonctions de répartition sont maintenant connues dans tous les cas de figure. Il nous reste à calculer les probabilités aux bornes 0 et h_1 du stock tampon.

1.2. - Probabilités aux bornes du stock tampon

Aux bornes du stock tampon, nous avons à distinguer l'état réel des machines de l'état observé.

Si, par exemple, le stock tampon est nul et l'état réel du système constitué par les deux machines est (0,1) -i.e. première machine en panne et seconde machine en état de fonctionner- alors l'état observé du système est (0,0) : la seconde machine ne pouvant être approvisionnée est en attente.

Supposons maintenant que $c_2 > c_1$, que le niveau du stock tampon soit nul et que les deux machines soient en état de fonctionner. Alors, tant que l'état réel du système reste (1,1), l'état observé passerait instantanément et alternativement de (1,0) à (1,1). Cette situation n'est pas réaliste. Nous admettrons que, dans ce cas, le débit de c_2 est ramené à c_1 et que les deux machines continuent à fonctionner jusqu'à la prochaine panne. Nous trouvons une situation analogue lorsque $c_1 > c_2$ et que le niveau du stock est égal à h_1 : alors le débit de la première machine est ramené à c_2 tant que les deux machines continuent à fonctionner.

Le tableau 2 donne les différentes situations possibles lorsque le niveau du stock tampon est égal à l'une de ses bornes.

Stock tampon	Débits	Etat réel	Etat observé	Débit machine amont	Débit machine aval
0	quelconques et $\neq 0$	(0,0)	(0,0)	0	0
0	quelconques et $\neq 0$	(0,1)	(0,0)	0	0
0	quelconques et $\neq 0$	(1,0)	Etat instable de probabilité nulle		
0	$c_1 > c_2$	(1,1)	Etat instable de probabilité nulle		
0	$c_2 \geq c_1$	(1,1)	(1,1)	c_1	c_1
h_1	quelconques et $\neq 0$	(0,0)	(0,0)	0	0
h_1	quelconques et $\neq 0$	(0,1)	Etat instable de probabilité nulle		
h_1	quelconques et $\neq 0$	(1,0)	(0,0)	0	0
h_1	$c_1 \geq c_2$	(1,1)	(1,1)	c_2	c_2
h_1	$c_1 < c_2$	(1,)	Etat instable de probabilité nulle.		

<u>Tableau 2</u>

Nous noterons :

$m_{i,j}^{k,\ell}(t)$ la probabilité qu'à l'instant t l'état réel soit (i,j), l'état observé (k,ℓ) et le niveau du stock tampon 0

$M_{i,j}^{k,\ell}(t)$ la probabilité qu'à l'instant t l'état réel soit (i,j), l'état observé (k,ℓ) et le niveau du stock tampon h_1.

En régime permanent, ces probabilités seront respectivement notées $m_{i,j}^{k,\ell}$ et $M_{i,j}^{k,\ell}$.

Nous distinguons les cas $c_1 \neq c_2$ et $c_1 = c_2 = c$.

1.2.1. - $\underline{c_1 \neq c_2}$

1.2.1.1. - $\underline{c_1 > c_2}$

En régime non stationnaire, les équations qui conduisent aux probabilités aux bornes du stock tampon s'écrivent alors :

$$m_{00}^{00}(t+dt) = m_{00}^{00}(t)\ [1-(r_1+r_2)dt]$$

$$m_{01}^{00}(t+dt) = m_{01}^{00}(t)\ [1-r_1 dt] + m_{00}^{00}(t)\ r_2\ dt + c_2\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+,t)dt$$

$$M_{00}^{00}(t+dt) = M_{00}^{00}(t)\ [1-(r_1+r_2)dt]$$

$$M_{10}^{00}(t+dt) = M_{10}^{00}(t)\ [1-r_2\ dt] + M_{00}^{00}(t)r_1\ dt + c_1\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-,t)dt + M_{11}^{11}(t)\ p_2\ dt$$

$$M_{11}^{11}(t+dt) = M_{11}^{11}(t)\ [1-(p_1+p_2)dt] + r_2\ M_{10}^{00}(t)\ dt + (c_1-c_2)\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x}\ (h_1^-,t)dt$$

Equations qui conduisent à :

$$\frac{dm_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2)\ m_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dm_{01}^{00}}{dt}(t) = -r_1\ m_{01}^{00}(t) + r_2\ m_{00}^{00}(t) + c_2\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+,t)$$

$$\frac{dM_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2)\ M_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{10}^{00}}{dt}(t) = -r_2\ M_{10}^{00}(t) + r_1\ M_{00}^{00}(t) + c_1\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-,t) + p_2\ M_{11}^{11}(t)$$

$$\frac{dM_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2)\ M_{11}^{11}(t) + r_2\ M_{10}^{00}(t) + (c_1-c_2)\ \frac{\partial F_{11}}{\partial x}\ (h_1^-,t)$$

En régime permanent, ces relations nous conduisent à :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1}\ \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

$$0 = -r_2\ M_{10}^{00} + p_2\ M_{11}^{11} + c_1\ \frac{dF_{10}}{dx}\ (h_1^-)$$

$$0 = +r_2\ M_{10}^{00} - (p_1+p_2)\ M_{11}^{11} + (c_1-c_2)\ \frac{dF_{11}}{dx}\ (h_1^-)$$

et toutes les probabilités ne figurant pas dans ces relations sont nulles.

Finalement :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1}\ \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{1}{p_1}\ [c_1\ \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) + (c_1-c_2)\ \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-)]$$

$$M_{10}^{00} = \frac{1}{r_2}\ [2\ c_1\ \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) + (c_1-c_2)\ \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-)]$$

Et, en tenant compte de (2.2) :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} \cdot \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \tag{10.1}$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c_2}{p_1} \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) \tag{10.2}$$

$$M_{10}^{00} = \frac{1}{r_2} [c_1 \frac{dF_{10}}{dx} (h_1^-) + c_2 \frac{p_2}{p_1} \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-)] \tag{10.3}$$

et :

$$m_{00}^{00} = m_{10}^{10} = m_{11}^{11} = M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = 0 \tag{10.4}$$

1.2.1.2. - $\underline{c_1 < c_2}$

En procédant comme ci-dessus, nous sommes conduits aux équations :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \tag{11.1}$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \tag{11.2}$$

$$m_{01}^{00} = \frac{1}{r_1} [\frac{p_1 c_1}{p_2} \cdot \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) + c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+)] \tag{11.3}$$

et :

$$M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = M_{11}^{11} = m_{00}^{00} = m_{10}^{10} = 0 \tag{11.4}$$

1.2.2. - $\underline{c_1 = c_2 = c}$

Les équations s'écrivent, en régime non stationnaire :

$$m_{00}^{00}(t+dt) = m_{00}^{00}(t) [1 - (r_1+r_2)dt]$$

$$m_{01}^{00}(t+dt) = m_{01}^{00}(t) [1 - r_1 dt] + m_{00}^{00}(t) r_2 dt + c \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+,t)dt + m_{11}^{11}(t)p_1 dt$$

$$m_{11}^{11}(t+dt) = m_{11}^{11}(t) [1 - (p_1+p_2)dt] + r_1 m_{01}^{00}(t) dt$$

$$M_{00}^{00}(t+dt) = M_{00}^{00}(t) [1 - (r_1+r_2)dt]$$

$$M_{10}^{00}(t+dt) = M_{10}^{00}(t)\ [1-r_2dt] + M_{00}^{00}(t).r_1dt + c\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-,t)dt$$
$$+ M_{11}^{11}(t)\ p_2\ dt$$

$$M_{11}^{11}(t+dt) = M_{11}^{11}(t)\ [1-(p_1+p_2)dt] + r_2\ M_{10}^{00}(t)\ dt$$

$$M_{01}^{01}(t) = m_{10}^{10}(t) = 0$$

Ces relations conduisent à :

$$\frac{dm_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2)\ m_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dm_{01}^{00}}{dt}(t) = -r_1\ m_{01}^{00}(t) + r_2\ m_{00}^{00}(t) + p_1\ m_{11}^{11}(t) + c\ \frac{\partial F_{01}}{\partial x}(0^+,t)$$

$$\frac{dm_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2)\ m_{11}^{11}(t) + r_1\ m_{01}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{00}^{00}}{dt}(t) = -(r_1+r_2)\ M_{00}^{00}(t)$$

$$\frac{dM_{10}^{00}}{dt}(t) = -r_2\ M_{10}^{00}(t) + r_1\ M_{00}^{00}(t) + p_2\ M_{11}^{11}(t) + c\ \frac{\partial F_{10}}{\partial x}(h_1^-,t)$$

$$\frac{dM_{11}^{11}}{dt}(t) = -(p_1+p_2)\ M_{11}^{11}(t) + r_2\ M_{10}^{00}(t)$$

soit, en régime permanent :

$$m_{00}^{00} = M_{00}^{00} = M_{01}^{01} = m_{10}^{10} = 0$$

$$-r_1\ m_{01}^{00} + p_1\ m_{11}^{11} + c\ \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = 0$$

$$-(p_1+p_2)\ m_{11}^{11} + r_1\ m_{01}^{00} = 0$$

$$-r_2\ M_{10}^{00} + p_2\ M_{11}^{11} + c\ \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = 0$$

$$-(p_1+p_2)\ M_{11}^{11} + r_2\ M_{10}^{00} = 0$$

et nous sommes conduits à la solution :

$$m_{11}^{11} = \frac{c}{p_2} \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \qquad (12.1)$$

$$m_{01}^{00} = c\,\frac{p_1 + p_2}{r_1\, p_2}\,\frac{dF_{01}}{dx}(0^+) \qquad (12.2)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c}{p_1} \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \qquad (12.3)$$

$$M_{10}^{00} = c\,\frac{p_1 + p_2}{r_2\, p_1}\,\frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \qquad (12.4)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles.

1.3. - Recherche des constantes d'intégration

Les résultats précédents dépendent de deux constantes d'intégration. Deux conditions doivent donc être réalisées.

1.3.1. - Somme des probabilités

Cette relation sera utilisée dans tous les cas de figure. Elle s'obtient en écrivant que la somme des probabilités est égale à 1 :

$$F_{00}(h_1^-)+F_{01}(h_1^-)+F_{10}(h_1^-)+F_{11}(h_1^-)+m_{00}^{00}+m_{01}^{00}+m_{11}^{11}+M_{00}^{00}+M_{10}^{00}+M_{11}^{11} = 1 \qquad (13)$$

On se souviendra que m_{11}^{11} ou M_{11}^{11} peuvent correspondre à des états instables, donc être nulles (cf. tableau 2).

1.3.2. - Stabilité au voisinage des bornes du stock

Nous sommes conduits à envisager trois cas.

1.3.2.1. - $c_1 < c_2$

Dans ce cas et en tenant compte des états réels stables auxbornes du stock :

$$c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = (c_2-c_1) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-) ,$$

$$c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) = c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) + (c_2-c_1) \frac{dF_{11}}{dx}(0^+)$$

La seconde relation est toujours vérifiée (cf. 2.2) et c'est la première qui nous donnera la relation manquante. Compte-tenu de (2.2), elle devient :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) = 0 \tag{14}$$

1.3.2.2. - $\underline{c_1 = c_2 = c}$

Toujours en tenant compte des états réels stables aux bornes :

$$\frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = \frac{dF_{10}}{dx}(0^+) \tag{15}$$

$$\frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-) = \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) \tag{16}$$

Nous verrons que (15) et (16) constituent une condition unique (conséquence des formes des fonctions de répartition dans ce cas).

1.3.2.3. - $\underline{c_1 > c_2}$

Toujours en tenant compte des états réels du système qui sont stables aux bornes :

$$(c_1-c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(h_1^-) + c_1 \frac{dF_{10}}{dx}(h_1^-) = c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(h_1^-)$$

et :

$$c_2 \frac{dF_{01}}{dx}(0^+) = (c_1-c_2) \frac{dF_{11}}{dx}(0^+).$$

C'est la seconde relation qui nous permettra de lever l'indétermination (la première est toujours vérifiée). Compte tenu de (2.2), elle se réécrit :

$$\frac{dF_{10}}{dx}(0^+) = 0 \tag{17}$$

1.4. - Taux de production du système

Nous sommes conduits à envisager les cas suivants :

1.4.1. - $c_1 \neq c_2$ -

1.4.1.1. - $c_1 r_1/(r_1+p_1) = c_2 r_2/(r_2+p_2)$

Alors les fonctions de répartition sont données par (5.1) et (5.2), complétées par (2.1) et (2.2). Les probabilités aux bornes exigent de distinguer $c_1 > c_2$ de $c_2 > c_1$.

1.4.1.1.1. - $c_1 > c_2$ -

Alors la condition (17) est vraie et compte tenu de (5.2) :

$$\frac{B}{D} K(A+D) + S \frac{D}{A+D} = 0$$

Les expressions (5.1) et (5.2) se réécrivent :

$$F_{01}(x) = - S \frac{D^2}{B(A+D)^2} \{\exp[(A+D)x] - 1\} - S \frac{E}{A+D} x \tag{18.1}$$

$$F_{10}(x) = -S \frac{D}{(A+D)^2} \{\exp[(A+D)x] - 1\} + s \frac{D}{A+D} x \tag{18.2}$$

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

Les expressions (10.1), (10.2) et (10.3) deviennent :

$$m_{01}^{00} = - S \frac{c_2}{r_1(A+D)} (\frac{D^2}{B} + E) \tag{18.3}$$

$$M_{11}^{11} = - S \frac{c_2}{p_1(A+D)} \{\frac{D^2}{B} \exp [(A+D)h_1] + E\} \tag{18.4}$$

$$M_{10}^{00} = - S \frac{c_2\ p_2}{r_2 p_1(A+D)} \{\frac{D^2}{B} \exp[(A+D)h_1]+ E\} \tag{18.5}$$

Les probabilités aux bornes qui ne figurent pas ici sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13) compte tenu de (18.1) à (18.5).

Le taux de production s'écrit finalement :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-) + M_{11}^{11}]c_2 \tag{19}$$

1.4.1.1.2. - $\underline{c_1 < c_2}$ -

Nous appliquons alors la dondition (14) qui s'écrit ici :

$$K(A+D) \exp[(A+D)h_1] - S \frac{E}{A+D} = 0$$

soit :

$$K = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1]$$

Les expressions (5.1) et (5.2) se réécrivent :

$$F_{01}(x) = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1]\{\exp[(A+D)x]-1\} - S \frac{E}{A+D}x \tag{20.1}$$

$$F_{10}(x) = S \frac{E}{(A+D)^2} \exp[-(A+D)h_1]\{\exp[(A+D)x]-1\} + S \frac{D}{A+D}x \tag{20.2}$$

A ces relations s'ajoutent (2.1) et (2.2).

En outre, les relations (11.1), (11.2) et (11.3) se réécrivent :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} S \qquad (20.3)$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} \cdot \frac{1}{A+D} S\{A \exp[-(A+D)h_1] + D\} \qquad (20.4)$$

$$m_{01}^{00} = \frac{c_1\ p_1}{p_2\ r_1} \frac{1}{A+D} S\{A \exp[-(A+D)h_1] + D\} \qquad (20.5).$$

Les probabilités non mentionnées sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13).

Le taux de production du système s'écrit :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-)]\ c_2 + m_{11}^{11}\ c_1$$

1.4.1.2. - $\underline{c_1 r_1/(r_1+p_1) \neq c_2 r_2/(r_2+p_2)}$

Nous sommes dans le cas où les taux de production des machines sont différents : les fonctions de répartition sont données par (6.1), (6.2), (2.1) et (2.2). Les probabilités aux bornes et les conditions utilisées pour lever les indéterminations nous conduisent à envisager deux cas.

1.4.1.2.1. - $\underline{c_1 > c_2}$

Alors la condition (17) doit être vérifiée et, compte tenu de (6.1) :

$$K\ k_1 + S\ k_2 = 0$$

soit :

$$K = -\frac{k_2}{k_1} S \qquad (21)$$

($k_1 \neq 0$. En effet, les deux racines sont différentes de zéro lorsque les taux de production sont différents).

Les expressions (6.1) et (6.2) se réécrivent, en utilisant (21) :

$$F_{10}(x) = -\frac{k_2}{k_1} S\,[\exp(k_1x)-1] + S[\exp(k_2x) - 1] \tag{22.1}$$

$$F_{01}(x) = -\frac{k_2(k_1-A)}{Bk_1} S[\exp(k_1x)-1] + \frac{k_2-A}{B} S[\exp(k_2x)-1] \tag{22.2}$$

Bien entendu,(2.1) et (2.2) restent vraies.

Les expressions de probabilités aux bornes, données par (10.1) à (10.4),se réécrivent alors :

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2\ k_2}{r_1B}\ S(k_2-k_1) \tag{22.3}$$

$$M_{11}^{11} = -\frac{c_2\ k_2}{p_1B}\ S[(k_2-A)\exp(k_2h_1)-(k_1-A)\exp(k_1h_1)] \tag{22.4}$$

$$M_{10}^{00} = \frac{k_2}{r_2}\ S[\exp(k_2h_1)(c_1 + \frac{c_2p_2(k_2-A)}{Bp_1}) - \exp(k_1h_1)\ (c_1 + \frac{c_2p_2(k_1-A)}{Bp_1})] \tag{22.5}$$

Les probabilités non mentionnées sont nulles. S s'obtient alors en appliquant (13) et :

$$Z_{h_1} = [F_{01}(h_1^-) + F_{11}(h_1^-) + M_{11}^{11}]\ c_2 \tag{23}$$

1.4.1.2.2. - $\underline{c_1 < c_2}$

Alors la condition (14) doit être vérifiée. Compte tenu de (6.2), elle conduit à :

$$K = -\frac{k_2(k_2-A)}{k_1(k_1-A)} S\ \exp[(k_2-k_1)h_1] \tag{24}$$

(il est facile,mais long,de montrer que $k_1 \neq 0$ et $k_1 \neq A$ sous nos hypothèses).

Les expressions (6.1) et (6.2) se réécrivent, en utilisant (24) :

$$F_{10}(x) = -\frac{k_2(k_2-A)}{k_1(k_1-A)} S \exp[(k_2-k_1)h_1].[\exp(k_1x)-1] + S[\exp(k_2x)-1] \quad (25.1)$$

$$F_{01}(x) = -\frac{k_2(k_2-A)}{Bk_1} S \exp[(k_2-k_1)h_1].[\exp(k_1x)-1] + \frac{k_2-A}{B} S[\exp(k_2x)-1] \quad (25.2)$$

Les probabilités aux bornes, données par (11.1) à (11.4), se réécrivent alors :

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} k_2 \; S \exp(k_2h_1) \frac{k_2-k_1}{A-k_1} \quad (25.3)$$

$$m_{11}^{11} = S \frac{c_1 \; k_2}{p_2(A-k_1)} \{[k_2-A] \exp[(k_2-k_1)h_1] + A-k_1\} \quad (25.4)$$

$$m_{01}^{00} = S \frac{k_2}{r_1} \{\exp[(k_2-k_1)h_1][k_2-A][\frac{p_1 \; c_1}{p_2(A-k_1)} - \frac{c_2}{B}] + \frac{p_1 \; c_1}{p_2} + \frac{c_2(k_2-A)}{B}\} \quad (25.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante S s'obtient en appliquant (13).

Le taux de production est donné par :

$$Z_{h_1} = [F_{11}(h_1^-) + F_{01}(h_1^-)] \; c_2 + m_{11}^{11} \; c_1$$

1.4.2. - $\underline{c_1 = c_2 = c}$

Nous sommes conduits à étudier deux cas :

1.4.2.1. - $\underline{r_1p_2 \neq r_2p_1}$ <u>(productivités différentes)</u>

Les fonctions de répartition sont données par (9.1) et (9.2), complétées par (2.1) et (7.1).

Ecrivons la condition (15) à l'aide de (9.1) et (9.2) :

$$K\,U\,(r_1p_2-r_2p_1) + S\,\frac{r_2\,p_1}{r_1p_2-r_2p_1} = K\,U(r_1p_2-r_2p_1)+S\,\frac{r_1\,p_2}{r_1p_2-r_2p_1}$$

Cela entraîne S = 0.

Nous vérifions que (16) est vraie pour S = 0.

Les fonctions de répartition se réduisent donc à :

$$F_{01}(x) = K\{\exp[U(r_1p_2 - r_2p_1)x] - 1\} \qquad (27.1)$$

où U est donné par (9.3).

$$F_{10}(x) = F_{01}(x) \qquad (27.2)$$

$$F_{11}(x) = \frac{r_1 + r_2}{p_1 + p_2}\,F_{01}(x) \qquad (27.3)$$

$$F_{00}(x) = \frac{p_1 + p_2}{r_1 + r_2}\,F_{01}(x) \qquad (27.4)$$

Compte tenu de ces relations et en utilisant (12.1) à (12.4), les probabilités aux bornes s'écrivent :

$$m_{11}^{11} = K\,\frac{c}{p_2}\,U(r_1p_2 - r_2p_1) \qquad (27.5)$$

$$m_{01}^{00} = K\,c\,\frac{p_1 + p_2}{r_1\,p_2}\,U(r_1p_2 - r_2p_1) \qquad (27.6)$$

$$M_{11}^{11} = K\,\frac{c}{p_1}\,U(r_1p_2 - r_2p_1)\exp[U(r_1p_2-r_2p_1)h_1] \qquad (27.7)$$

$$M_{10}^{00} = K\,c\,\frac{p_1 + p_2}{r_2\,p_1}\,U(r_1p_2-r_2p_1)\,\exp[U(r_1p_2-r_2p_1)h_1] \qquad (27.8)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante K s'obtient alors en appliquant (13).

Finalement, le taux de production est donné par :

$$Z_{h_1} = [F_{11}(h_1^-) + F_{01}(h_1^-) + m_{11}^{11} + M_{11}^{11}]c \qquad (28)$$

1.4.2.2. - $r_1p_2 = r_2p_1$ (même productivité)

Les fonctions de répartition sont données par (9.4), (9.5), (2.1) et (7.1).

Ecrivons la condition (15) en utilisant (9.4) et (9.5) :

$$K + S = K$$

Donc S = 0 et, sous cette condition, (16) est vérifiée.

Les fonctions de répartition s'écrivent alors :

$$F_{01}(x) = F_{10}(x) = K\,x \qquad (29.1)$$

$$F_{11}(x) = \frac{r_1 + r_2}{p_1 + p_2} K\,x \qquad (29.2)$$

$$F_{00}(x) = \frac{p_1 + p_2}{r_1 + r_2} K\,x \qquad (29.3)$$

Les probabilités aux bornes, données par (12.1) à (12.4), deviennent :

$$m_{11}^{11} = \frac{c}{p_2} K \qquad (29.4)$$

$$m_{01}^{00} = c\,\frac{p_1 + p_2}{r_1\, p_2} K \qquad (29.5)$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c}{p_1} K \qquad (29.6)$$

$$M_{10}^{00} = c\,\frac{p_1 + p_2}{r_2\, p_1} K \qquad (29.7)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante K s'obtient en appliquant (13).

Le taux de production est donné par (28).

Cas particulier : les deux machines sont identiques

Posons $r_1 = r_2 = r$, $p_1 = p_2 = p$ et $c_1 = c_2 = c$.

Alors (13) donne :

$$K = \frac{1}{\frac{(r+p)^2}{rp} h_1 + 2\, c\, \frac{r + 2p}{pr}}$$

et :

$$Z_{h_1} = \frac{r(r+p)\, h_1 + 2\, c\, r}{(r+p)^2\, h_1 + 2c\, (r+2p)}$$

Nous voyons que :

$$\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c\, \frac{r}{r+p} \quad :$$

c'est le taux de production des machines

$$\lim_{h_1 \to +\infty} z_{h_1} = c\, \frac{r}{r+2p}$$

(en effet, 2p et r sont respectivement les taux de panne et de réparation du système des deux machines identiques sans stock tampon).

2. - CAS PARTICULIERS

Nous donnons brièvement les résultats obtenus dans les cas particuliers. Certains sont évidents.

2.1. - $c_1 = 0$ et/ou $c_2 = 0$

En régime permanent, le taux de production du système est nul.

Si $c_1 > c_2 = 0$, le stock reste au maximum en régime permanent.

Si $0 = c_1 < c_2$, le stock reste à son minimum en régime permanent.

Si $0 = c_1 = c_2$, le stock reste à son niveau initial.

2.2. - $r_1 = 0$ et/ou $r_2 = 0$

Le taux de production est nul en régime permanent : l'une des machines au moins est et reste en panne.

2.3. - $p_1 = 0$ et/ou $p_2 = 0$ (les autres paramètres sont différents de zéro).

Nous envisageons trois cas :

2.3.1. - $p_1 = 0$ et $p_2 \neq 0$

La machine amont ne tombe jamais en panne.

2.3.1.1. - Si $c_1 \geq c_2$

Alors deux probabilités seulement ne sont pas nulles :

$$M_{11}^{11} = \frac{r_2}{p_2 + r_2} \tag{30.1}$$

et :

$$M_{10}^{00} = \frac{p_2}{p_2 + r_2} \tag{30.2}$$

Le taux de production s'écrit :

$$Z_{h_1} = \frac{r_2}{r_2 + p_2} c_2 \tag{31}$$

C'est le taux de production de la seconde machine. Il ne dépend pas du niveau maximum du stock.

2.3.1.2 - $c_1 < c_2$

Nous envisageons plusieurs éventualités.

2.3.1.2.1. - $c_1 = c_2 r_2 / (r_2 + p_2)$

C'est le cas où les deux machines ont des taux de production égaux. Nous obtenons :

$$F_{10}(x) = W x, \; W \in \mathbb{R} \tag{32.1}$$

$$F_{01}(x) = F_{00}(x) = 0 \tag{32.2}$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_1}{c_2-c_1} x \tag{32.3}$$

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} W \tag{32.4}$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} W \tag{32.5}$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. La constante W s'obtient en utilisant (13) :

$$W \left\{\frac{c_2}{c_2-c_1} h_1 + \frac{c_1}{r_2} + \frac{c_1}{p_2}\right\} = 1 \tag{33}$$

et :

$$Z_{h_1} = c_1 \frac{c_2 r_2 p_2 h_1 + c_1(c_2-c_1) r_2}{c_2 r_2 p_2 h_1 + c_1(c_2-c_1)(r_2+p_2)} \tag{34}$$

Nous observons que :

$$\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_1$$

c'est le taux de production commun aux deux machines.

$$\lim_{h_1 \to 0^+} Z_{h_1} = c_1 \frac{r_2}{r_2 + p_2}$$

c'est le taux de production de la seconde machine lorsque $h_1 = 0$ (le débit de la seconde machine est alors ramené au débit le plus faible).

2.3.1.2.2. - $c_1 \neq c_2 r_2/(r_2+p_2)$

Les taux de production des deux machines sont différents. Nous obtenons :

$$F_{10}(x) = W[\exp(Ax) - 1], \; W \in \mathbb{R} \tag{35.1}$$

$$F_{01}(x) = F_{00}(x) = 0 \tag{35.2}$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_1}{c_2 - c_1} [\exp(Ax)-1] \tag{35.3}$$

$$M_{10}^{00} = \frac{c_1}{r_2} W \; A \exp(Ah_1) \tag{35.4}$$

$$m_{11}^{11} = \frac{c_1}{p_2} \; W \; A \tag{35.5}$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. K est encore donné par la relation (13) et :

$$Z_{h_1} = \frac{p_2 r_2 c_2 c_1[\exp(Ah_1)-1] + r_2 c_1^2 (c_2-c_1)A}{c_2 p_2 r_2 [\exp(Ah_1)-1] + p_2 c_1 (c_2-c_1)A \exp(Ah_1) + r_2 c_1 (c_2-c_1)A} \tag{36}$$

Si le taux de production de la première machine est supérieur au taux de production de la seconde, alors $A > 0$ et :

$$\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_2 \frac{r_2}{r_2 + p_2} \quad \text{(taux de production de la machine aval)}$$

Dans le cas contraire, $A < 0$ et :

$$\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_1 \quad \text{(taux de production de la machine amont)}$$

2.3.2. - $\underline{p_1 \neq 0 \text{ et } p_2 = 0}$ (les autres paramètres sont non nuls)

C'est le cas où la machine aval ne tombe jamais en panne.

2.3.2.1. - $\underline{\text{Si } c_1 \leq c_2}$

Alors deux probabilités seulement ne sont pas nulles :

$$m_{11}^{11} = \frac{r_2}{p_2 + r_2} \tag{37.1}$$

$$m_{01}^{00} = \frac{p_2}{p_2 + r_2} \tag{37.2}$$

Le taux de production s'écrit :

$$Z_{h_1} = c_1 \frac{r_1}{r_1 + p_1} \tag{38}$$

2.3.2.2. - Si $c_1 > c_2$

Nous envisageons plusieurs éventualités.

2.3.2.2.1. - $c_2 = c_1 r_1 / (r_1 + p_1)$

Les taux de production des deux machines sont alors égaux. Nous obtenons :

$$F_{01}(x) = W x \quad (W \in \mathbb{R}) \tag{39.1}$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_2}{c_1 - c_2} x \tag{39.2}$$

$$F_{10}(x) = F_{00}(x) = 0 \tag{39.3}$$

$$M_{11}^{11} = \frac{c_2}{p_1} W \tag{39.4}$$

$$m_{01}^{00} = \frac{c_2}{r_1} W \tag{39.5}$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. W est donné par la condition (13) et :

$$Z_{h_1} = c_2 \frac{h_1 c_1 r_1 p_1 + c_2 r_1 (c_1 - c_2)}{h_1 c_1 r_1 p_1 + c_2 (r_1 + p_1)(c_1 - c_2)} \tag{40}$$

Nous vérifions que :

$$\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_2$$

et :

$$\lim_{h_1 \to 0^+} Z_{h_1} = c_2 \frac{r_1}{r_1 + p_1}$$

2.3.2.2.2. - $c_2 \neq c_1 r_1/(r_1+p_1)$

Alors :

$$F_{01}(x) = W[\exp(Dx) - 1] \quad (40.1)$$

$$F_{11}(x) = W \frac{c_2}{c_1 - c_2} [\exp(Dx) - 1] \quad (40.2)$$

$$F_{10}(x) = F_{00}(x) = 0 \quad (40.3)$$

$$M_{11}^{11} = W \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1) \quad (40.4)$$

$$m_{01}^{00} = W \frac{c_2}{r_1} D \quad (40.5)$$

Les autres probabilités aux bornes sont nulles. W est obtenu en écrivant que (13) est vraie. De plus :

$$Z_{h_1} = c_2 \frac{[\exp(Dh_1) - 1] \frac{c_1}{c_1 - c_2} + \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1)}{[\exp(Dh_1)-1]\frac{c_1}{c_1-c_2} + \frac{c_2}{p_1} D \exp(Dh_1) + \frac{c_2}{r_1} D} \quad (41)$$

Il est aisé de vérifier que :

- si $D > 0$, $\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_2$

  Dans ce cas, la première machine a un taux de production supérieur à celui de la seconde.

- si $D < 0$, $\lim_{h_1 \to +\infty} Z_{h_1} = c_1 \frac{r_1}{r_1 + p_1}$

  C'est le cas où la première machine a un taux de production inférieur à celui de la seconde.

2.4. - $p_1 = p_2 = 0$

Les machines fonctionnent sans arrêt. Alors :

$Z_{h_1} = \text{Min}\ (c_1,c_2)$.

3. - EXEMPLES NUMERIQUES

Nous donnons deux exemples d'évolution du taux de production du système en fonction du niveau maximum h_1 du stock tampon.

Le premier donne l'évolution du taux de production du système en fonction du niveau maximum du stock tampon lorsque les débits des machines sont identiques ($c_1 = c_2 = 1$), le taux de production de la machine aval étant supérieur à celui de la machine amont (0.4 et 0.2 respectivement). Nous voyons que, lorsque le niveau maximum du stock tampon croît, le taux de production du système tend vers 0.2. (voir figure 1)

Le second exemple traite d'un cas général : débits des machines différents et taux de production différents (1.6 et 2.66 par machine amont et machine aval respectivement). Bien entendu, le taux de production du système tend vers la plus petite de ces deux quantités. (voir figure 2)

4. - POSITIONNEMENT D'UN STOCK DANS UNE LIGNE DE TRANSFERT

Une chaîne de fabrication entièrement automatisée et sans stock tampon présente un grave inconvénient : la mise hors service de l'un de ses éléments l'immobilise. Avec les notations introduites en A, il est facile de calculer que, dans le cas de n machines, la probabilité de fonctionnement du système est :

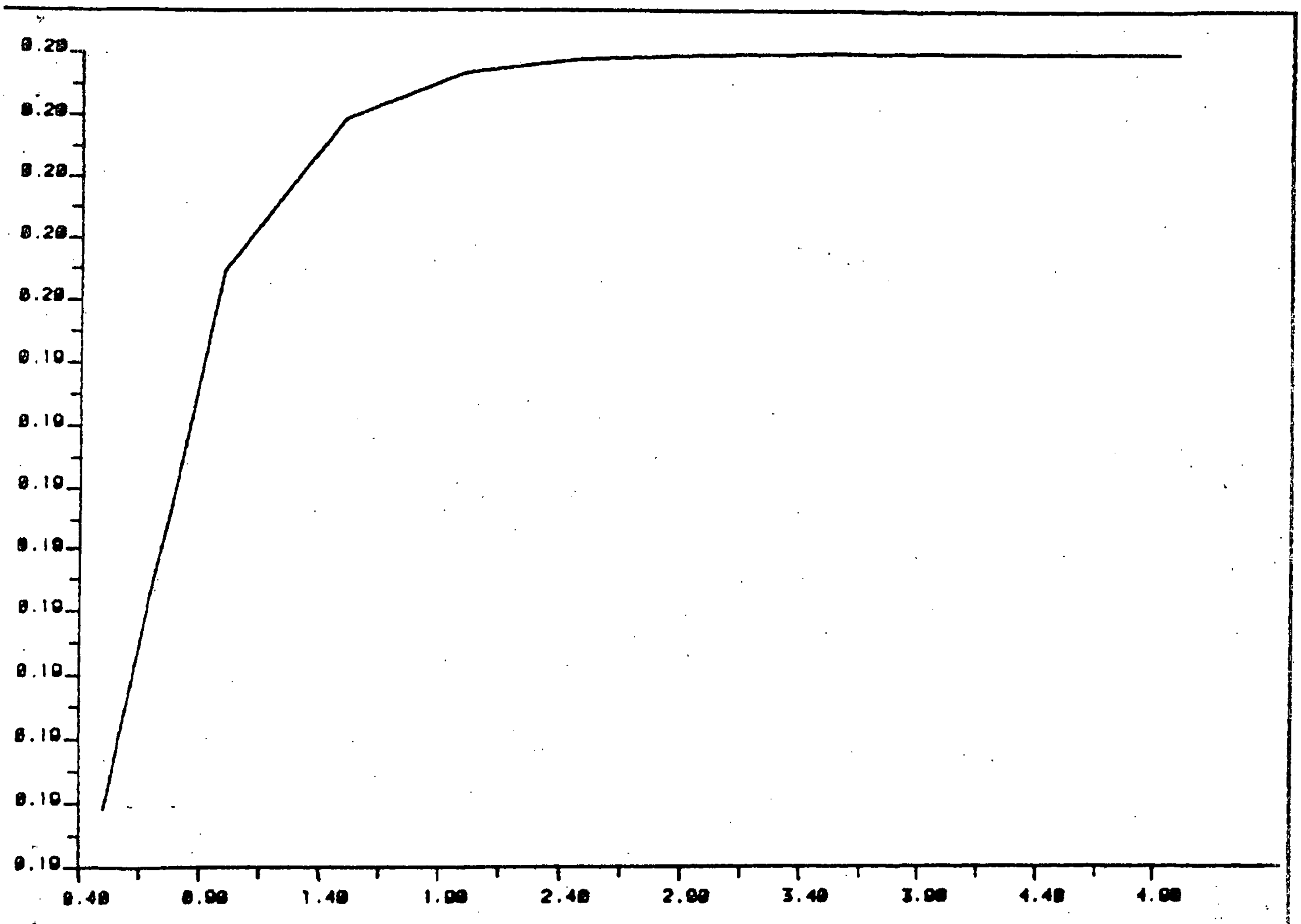
$$\theta_n = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} p_k/r_k}$$

Son taux de production est donc :

$$Z_o^n = \min_{k=1,\dots,n} (c_k) \times \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} p_k/r_k}$$

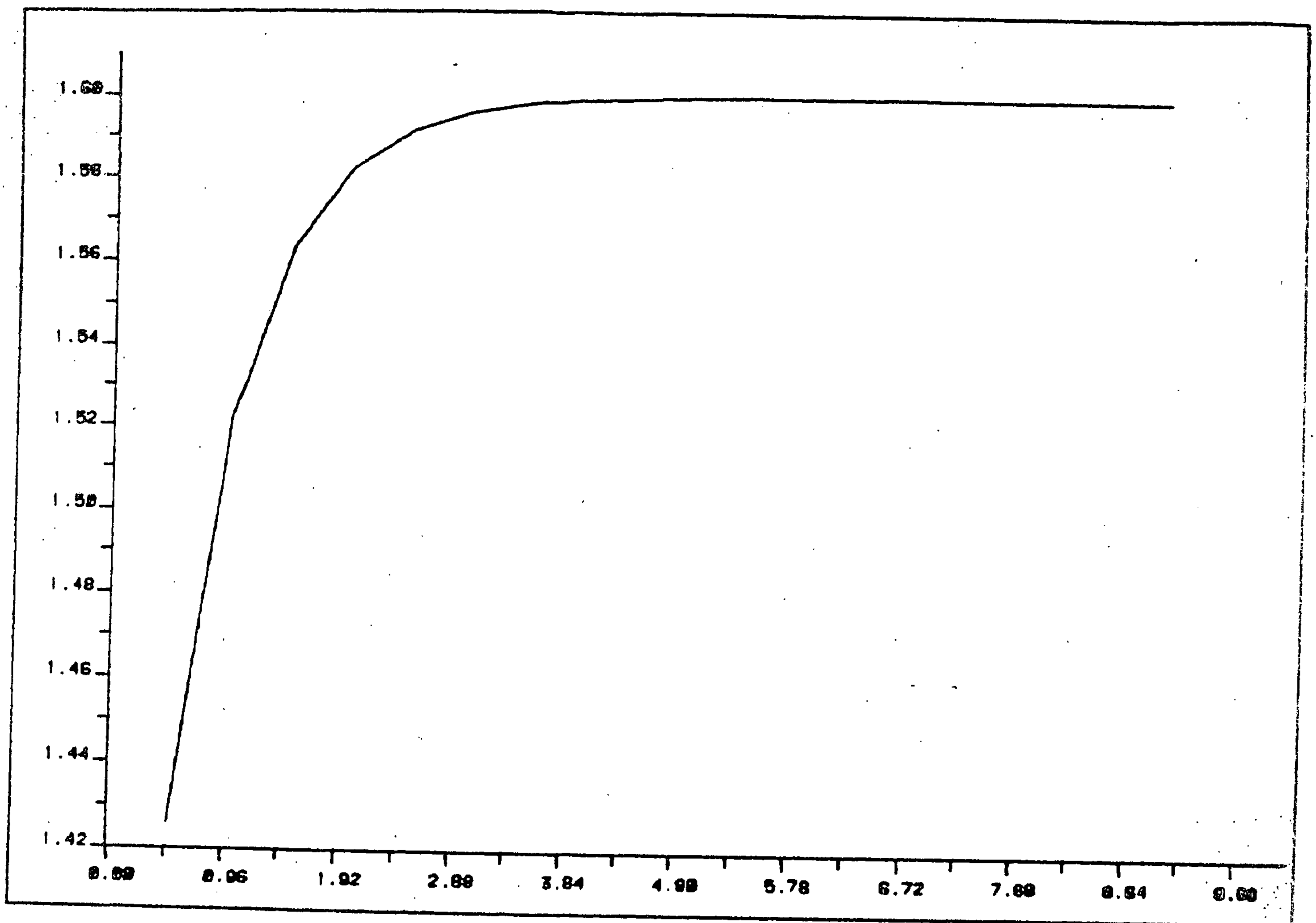
Si, $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$:

$$p_k/r_k \geq \varepsilon > 0$$



r1=1 p1=4 c1=1 r2=2 p2=3 c2=1
ıux de production en fonction du maxi du stock tampon

FIGURE 1



r1=4 p1=1 c1=2 r2=4 p2=2 c2=4

Taux de production en fonction du maxi du stock tampon

FIGURE 2

alors :

$$\lim_{n \to \infty} Z_0^n = 0$$

Des stocks tampons amélioreraient cette situation. Malheureusement, ils devraient être eux mêmes automatisés et coûteraient fort cher. La solution doit donc être écartée. Il est, cependant, parfois envisageable d'intercaler dans la ligne de transfertun seul stock tampon. Le problème est alors de chercher son emplacement.

Soit $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ et supposons que ce stock soit placé entre les machines M_i et M_{i+1}.

L'ensemble $\{M_1,\ldots,M_i\}$ peut être considéré comme une machine unique $\mathcal{M}_1$ avec :

- une probabilité $P_1\,dt$ de tomber en panne sur tout intervalle $[t,t+dt]$ sachant qu'elle fonctionne avant l'instant t ;
- une probabilité $R_1\,dt$ d'être séparée sur tout intervalle $[t,t+dt]$ sachant qu'elle est en panne avant l'instant t.

De même, l'ensemble $\{M_{i+1},\ldots,M_n\}$ peut être considérée comme une machine unique $\mathcal{M}_2$ pour laquelle P_2 et R_2 jouent respectivement les mêmes rôles que P_1 et R_1 pour $\mathcal{M}_1$.

On obtient, en observant qu'en régime permanent au plus une machine est en panne parmi $\{M_1,\ldots,M_i\}$ ou $\{M_{i+1},\ldots,M_n\}$:

$$P_1 = \sum_{k=1}^{i} p_k \qquad\qquad P_2 = \sum_{k=i+1}^{n} p_k$$

$$R_1 = \sum_{k=1}^{i} p_k / \sum_{k=1}^{i} (p_k/r_k) \qquad\qquad R_2 = \sum_{k=i+1}^{n} p_k / \sum_{k=i+1}^{n} (p_k/r_k)$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas de deux machines étudiées précédemment avec :

- débit instantanné de $\mathcal{M}_1$: $\mathcal{C}_1 = \underset{k=1,\ldots,i}{\text{Min}} \; c_i$

- débit instantanné de $\mathcal{M}_2$: $\mathcal{C}_2 = \underset{k=i+1,\ldots,n}{\text{Min}} \; c_i$

Nous savons calculer le débit Z_{h_i} du système en fonction du niveau maximum h_i du stock tampon (imposé par les contraintes techniques).

La position i_1 cherchée est telle que :

$$Z_{h_{i_1}} = \underset{i=1,\ldots,x-1}{\text{Max}} \; Z_{h_i}$$

Les expressions des fonctions de répartition et des densités de probabilité que nous venons de donner permettent de vérifier certaines propriétés et, en particulier, la suivante : si nous changeons le sens d'écoulement des produits dans le système, les densités de probabilité et les probabilités aux bornes sont symétriques par rapport à la valeur médiane du stock, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F^{*}_{ij}}{\partial x}(x_1) = \frac{\partial F_{ji}}{\partial x}(h_1 - x_1)$$

$$m^{*k\ell}_{ij} = M^{\ell k}_{ji}$$

$$M^{*k\ell}_{ij} = m^{\ell k}_{ji}$$

où * permet de repérer les densités de probabilité et les probabilités après changement du sens d'écoulement.

La seconde partie de ce papier développe le cas de trois machines identiques.

C - LE LOGICIEL

1 - LE PROGRAMME PRINCIPAL.

```
      dimension zh(200),zs(200)
      open(1,form="formatted")
      open(0)
      write(0,1)
    1 format(2x,"r1=proba. repa.:p1=proba. panne:c1=debit-machine 1")
      write(0,2)
    2 format(2x,"r2=proba. repa.:p2=proba. panne:c2=debit-machine 2")
      write(0,3)
    3 format(2x,"donnez r1,p1,c1,r2,p2,c2")
      read(0,4)r1,p1,c1,r2,p2,c2
    4 format(f7.2)
      write(1,6)
    6 format(20x,"machine amont")
      write(1,5)r1,p1,c1
    5 format(2x,"r1=",f8.2,2x,"p1=",f8.2,2x,"c1=",f8.2//)
      write(1,7)
    7 format(20x,"machine aval")
      write(1,8)r2,p2,c2
    8 format(2x,"r2=",f8.2,2x,"p2=",f8.2,2x,"c2=",f8.2//)
      write(0,9)
    9 format(2x,"donnez l'intervalle d'evolution du stock tampon")
      read(0,4)h1,h2
      write(0,10)
   10 format(2x,"donnez le pas d'evolution")
      read(0,11)d
   11 format(f9.6)
      u1=c1*r1/(p1+r1)
      u2=c2*r2/(p2+r2)
      write(1,12)u1
      write(1,13)u2
   12 format(2x,"taux de production machine amont=",2x,e14.7//)
   13 format(2x,"taux de production machine aval=",2x,e14.7//)
      i=0
      h=h1
   51 i=i+1
      call twoma(c1,c2,p1,p2,r1,r2,h,z)
      zh(i)=h
      zs(i)=z
      h=h+d
      if(h.gt.h2) go to 50
      if(i.lt.200) go to 51
   50 write(1,100)(zh(i),zs(i),i=1,i)
  100 format(3(2x,"h=",1x,f8.5,4x,"tp=",1x,f8.5,2x,"***"))
      close (1)
      stop
      end
```

2 - LE SOUS PROGRAMME Twoma.

```
      subroutine twoma(c1,c2,p1,p2,r1,r2,h,z)
      eps=1.e-7
c*****************************************************************
c**********etude des cas particuliers
c*****************************************************************
      u=c1*c2
      if(u.le.eps) go to 1
      u=r1*r2
      if(u.gt.eps) go to 2
1     z=0.
      go to 1000
2     if(p1.gt.eps) go to 3
      if(p2.gt.eps) go to 4
c
c p1=0 et p2=0
c
      z=c1
      if(c1.lt.c2) go to 1000
      z=c2
      go to 1000
c
c p1=0 et p2>0
c
4     u=r2*c2/(r2+p2)
      if(c1.lt.c2) go to 5
      z=u
      go to 1000
5     r=abs(c1-u)
      if(r.gt.eps) go to 6
      z=c2*r2*p2*h+c1*(c2-c1)*r2
      z=c1*z/(z+p2*c1*(c2-c1))
      go to 1000
6     a=p2/(c2-c1)-r2/c1
      r=a*h
      z=u
      if(r.gt.80.) go to 1000
      z=c1
      if(r.lt.-80.) go to 1000
      r=exp(r)
      z=p2*r2*c2*(r-1.)+r2*c1*(c2-c1)*a
      z=c1*z/(z+p2*c1*(c2-c1)*a*r)
      go to 1000
3     if(p2.gt.eps) go to 7
c
c p1>0 et p2=0
c
      u=r1*c1/(r1+p1)
      z=u
      if(c1.le.c2) go to 1000
      r=abs(c2-u)
      if(r.gt.eps) go to 8
      z=h*c1*r1*p1+c2*r1*(c1-c2)
      z=c2*z/(z+c2*p1*(c1-c2))
      go to 1000
```

```
8       d=p1/(c2-c1)+r1/c2
        r=d*h
        z=c2
        if(r.gt.80.) go to 1000
        z=0
        if(r.lt.-80.) go to 1000
        r=exp(r)
        z=(r-1.)*c1/(c1-c2)+c2/p1*d*r
        z=c2*z/(z+c2*d/r1)
        go to 1000
c*****************************************************
c**********etude des cas generaux
c*****************************************************
7       r=abs(c1-c2)
        if(r.le.eps) go to 9
        u1=c1*r1/(r1+p1)
        u2=c2*r2/(r2+p2)
        t=abs(u1-u2)
        a=p2/(c2-c1)-r2*(r1+r2+p1)/c1/(r1+r2)
        b=p2/c1*(r1/(r1+r2)-c2/(c2-c1))
        e=-p1/c2*(r2/(r1+r2)+c1/(c2-c1))
        d=p1/(c2-c1)+r1*(r1+r2+p2)/c2/(r1+r2)
c
c++++++++++cas ou c1 non equal a c2
c
        if(t.gt.eps) go to 10
c
c//// les deux machines ont memes taux de production
c
        s=(a+d)*h
        if(c1.lt.c2) go to 11
c----c1>c2
        f=s
        z=u1
        if(f.gt.80.) go to 1000
        s=0.
        if(f.lt.-80.) go to 12
        s=exp(s)
12      f01=d*d/(a+d)*(s-1.)+b*e*h
        f10=d*b/(a+d)*(s-1.)-b*d*h
        f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
        f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
        xi1=c2*(d*d+e*b)/r1
        xa1=c2*(d*d*s+e*b)/p1
        xa2=c2*p2*(d*d*s+e*b)/r2/p1
        x=f01+f11+xa1
        v=f10+f00+xi1+xa2
        z=x*c2/(x+v)
        go to 1000
c---c1<c2
11      z=u1
        if(s.gt.80.) go to 1000
        if(s.lt.-80.) go to 14
        s=exp(-s)
        f01=e/(a+d)*(1.-s)-e*h
        f10=a/(a+d)*(1.-s)+d*h
        f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
        f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
        xa1=c1*(a+d)/r2
        xm1=c1*(a*s+d)/p2
        xm2=p1*xm1/r1
        go to 13
```

```
14    f01=e/(a+d)
      f10=a/(a+d)
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xa1=0.
      xm1=c1*a/p2
      xm2=p1/r1*xm1
13    x=f01+f11
      v=x+f10+f00+xa1+xm1+xm2
      z=(x*c2+xm1*c1)/v
      go to 1000
c
c//// les deux machines ont des taux de production differents
c
10    d1=(a-d)*(a-d)+4.*e*b
      d1=d1**0.5
      xk=(a+d)/2.
      xk1=xk-d1/2.
      xk2=xk+d1/2.
      u=xk2*h
      if(c1.lt.c2) go to 15
c---c1>c2
      w=(xk1-xk2)*h
      if(u.le.80.) go to 16
      w=0.
      if(w.lt.-80.) go to 17
      w=exp(w)
17    f10=1.-xk2/xk1*w
      f01=(xk2-a)/b-xk2*(xk1-a)*w/b/xk1
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xi1=0.
      xa1=c2*xk2/p1/b*(xk2-a-(xk1-a)*w)
      s1=c1+c2*p2*(xk2-a)/b/p1
      s2=c1+c2*p2*(xk1-a)/b/p1
      xa2=xk2/r2*(s1-s2*w)
      go to 19
16    if(u.gt.-80.) go to 20
      f10=xk2/xk1-1.
      f01=-a*(xk2-xk1)/b/xk1
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xi1=c2*xk2/r1/b*(xk2-xk1)
      xa1=0.
      xa2=0.
      go to 19
20    u=exp(u)
      if(w.lt.-80.) go to 22
      w=exp(w)
      go to 23
22    w=0.
23    f10=u*(1.-(1.-xk2/xk1)/u-xk2*w/xk1)
      f01=(xk2-a)/b-a*(xk2-xk1)/b/xk1/u
      f01=f01-xk2*(xk1-a)/b/xk1*w
      f01=u*f01
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xi1=c2*xk2/r1/b*(xk2-xk1)
      xa1=c2*xk2/p1/b*u*(xk2-a-(xk1-a)*w)
```

```
      s=c2*p2/b/p1
      xa2=xk2/r2*u*(c1+s*(xk2-a)-(c1+s*(xk1-a))*w)
   19 x=f01+f11+xa1
      v=f10+f00+xi1+xa2
      z=x*c2/(x+v)
      go to 1000
c---c1<c2
   15 w=xk1*h
      if(w.le.80.) go to 25
      f10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)+1.
      f01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b+(xk2-a)/b
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)/r2/(a-xk1)
      xi1=0.
      xi2=0.
      go to 26
   25 if(u.le.80.) go to 27
      if(w.le.-80.) go to 30
      w=exp(w)
      f10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*(1.-1./w)+1.
      f01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b*(1.-1./w)+(xk2-a)/b
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)/r2/(a-xk1)
      xi1=c1*xk2/p2/(a-xk1)*(xk2-a)/w
      xi2=xk2/r1*(xk2-a)/w*(p1*c1/p2/(a-xk1)-c2/b)
      go to 26
   27 if(u.le.-80.) go to 28
      u=exp(u)
      if(w.le.-80.) go to 29
      w=exp(w)
      f10=-xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*(1.-1./w)
      f10=u*(f10+1.-1./u)
      f01=-xk2*(xk2-a)/xk1/b*(1.-1./w)
      f01=u*(f01+(xk2-a)/b*(1.-1./u))
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xa1=c1*xk2*(xk2-xk1)*u/r2/(a-xk1)
      xi1=(xk2-a)/w+(a-xk1)/u
      xi1=c1*xk2/p2/(a-xk1)*u*xi1
      s1=(xk2-a)*(p1*c1/p2/(a-xk1)-c2/b)/w
      s2=(p1*c1/p2+c2*(xk2-a)/b)/u
      xi2=xk2/r1*u*(s1+s2)
      go to 26
   29 f10=u*xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)
      f01=u*xk2*(xk2-a)/xk1/b
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r2+r1)
      xa1=0.
      xi1=c1*xk2/p2/(a-xk1)*(xk2-a)*u
      xi2=xk2/r1*u*(xk2-a)*(p1*c1/p2/(a-xk1)-c2/b)
      go to 26
   28 s=(xk2-xk1)*h
      if(s.gt.80.) go to 30
      s=exp(s)
      f10=xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)*s-1.
      f01=xk2*(xk2-a)/xk1/b*s-(xk2-a)/b
      f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
      f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
      xa1=0.
      xi1=c1*xk2*(xk2-a)/p2/(a-xk1)*s+a-xk1
```

```
          s1=s*(xk2-a)*(p1*c1/p2/(a-xk1)-c2/b)
          s2=p1*c1/p2+c2*(xk2-a)/b
          xi2=xk2*(s1+s2)/r1
          go to 26
     30   f10=xk2*(xk2-a)/xk1/(xk1-a)
          f01=xk2*(xk2-a)/xk1/b
          xa1=0.
          xi1=c1*xk2*(xk2-a)/p2/(a-xk1)
          xi2=xk2*(xk2-a)/r1
          xi2=xi2*(p1*c1/p2/(a-xk1)-c2/b)
          f11=(c1*f10-c2*f01)/(c2-c1)
          f00=(p1*f10+p2*f01)/(r1+r2)
     26   v=f11+f01+f10+f00+xa1+xi1+xi2
          z=((f11+f01)*c2+xi1*c1)/v
          go to 1000
c
c++++++++++cas c1=c2=c
c
     9    c=c1
          u1=r1*p2
          u2=r2*p1
          t=abs(u1-u2)
          if(t.gt.eps) go to 31
c
c//// les deux macines ont memes taux de production
c
          f01=h
          f10=h
          f11=(r1+r2)/(p1+p2)
          f00=1./f11
          f11=f11*h
          f00=f00*h
          xi1=c/p2
          xi2=c*(p1+p2)/r1/p2
          xa1=c/p1
          xa2=c*(p1+p2)/r2/p1
          go to 32
c
c//// les deux machines ont des taux de production differents
c
     31   u=(p1+p2+r1+r2)/c/(r1+r2)/(p1+p2)
          w=u*(r1*p2-r2*p1)*h
          z=c*r2/(r2+p2)
          if(w.gt.80.) go to 1000
          if(w.lt.-80.) go to 33
          w=exp(w)
          go to 34
     33   w=0.
     34   f01=w-1.
          f10=f01
          f11=(r1+r2)/(p1+p2)*f01
          f00=(p1+p2)/(r1+r2)*f01
          xi1=c*u*(r1*p2-r2*p1)/p2
          xi2=c*(p1+p2)/r1/p2*u*(r1*p2-r2*p1)
          xa1=c/p1*u*(r1*p2-r2*p1)*w
          xa2=c*(p1+p2)/r2/p1*u*(r1*p2-r2*p1)*w
     32   z=f01+f11+xi1+xa1
          z=c*z/(z+f00+f10+xi2+xa2)
   1000   return
          end
```

CONCLUSION.

Nous venons de fournir le taux de production en fonction du niveau maximal du stock tampon et de proposer une application.

Les logiciels fournis ont été testés soigneusement. Cependant, ils font intervenir des exponentielles dans le cas général : des erreurs de chute peuvent apparaître pour les grandes valeurs du maximum du stock tampon.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique